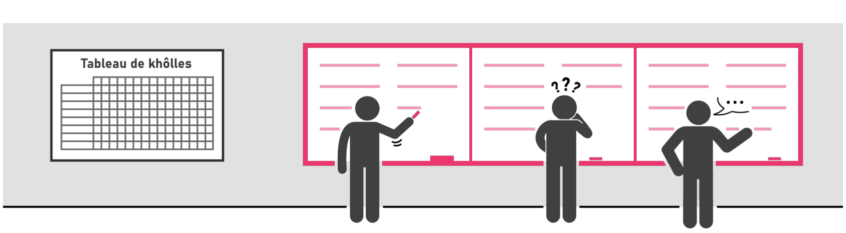

SUJETS DE COLLES 02

1. Questions de cours.

- Qu'appelle-t-on l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes (ensemble et lois).
- Prouver qu'un sous-espace vectoriel contient toujours le vecteur nul.
- Qu'est-ce qu'une famille libre ?
- Montrer que $\mathrm{Vect}\,\{e_1, \cdots, e_p\}$ est un sous-espace vectoriel.
- Qu'est-ce qu'une famille liée ?
- Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et soit $u \in E$. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de réels tels que
$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$
- Donner sans preuves toutes les caractéristiques de la loi binomiale.
- Donner sans preuves toutes les caractéristiques de la loi de Poisson.
- Donner sans preuves toutes les caractéristiques de la loi de géométrique.

2. Exercices classiques (algèbre linéaire).

Exercice 1 **1.** Montrer que, dans $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme X^2+1 est combinaison linéaire de 1, $X-1$ et $(X-1)^2$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \ : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 2

Résoudre le système suivant et présenter le résultat sous forme de Vect() :
$$\begin{cases} 5x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -x + 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et leur dimension :

1. $F_1 = \left\{ (2x-3y, 2y-3x, 2x), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2. l'ensemble F_2 des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} a-2b+c & b & c \\ b & a-2b+c & -c \\ c & -c & a-2b+c \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère F l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $P(2) = 0$ et $P'(1) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-ev de E.
2. Soit $P = ax^3 + bx^2 + cx + d \in E$. Donner deux équations sur les réels a, b, c, d pour que $P \in F$.
3. En déduire une famille génératrice de F.
4. Cette famille est-elle une base de F ? Déterminer $\dim(F)$.

3. Exercices classiques (probas).

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. La variable X a-t-elle plus de chances de prendre une valeur paire ou impaire ?

Exercice 6

On effectue des tirages sans remise d'une boule dans une urne contenant $n-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer que X suit la loi uniforme $\mathcal{U}[\![1, n]\!]$.

Exercice 7

On note X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que sachant $[X = n]$ une variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que Y suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

4. Exercices plus difficiles.

Exercice 8

On note $E = \mathbb{R}_4[X]$. On dit qu'un polynôme P est pair (resp. impair) s'il définit une fonction paire de R dans R, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(-x) = P(x) \quad \text{resp.} \quad P(-x) = -P(x).$$

Par ailleurs, lorsque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on note

$$F + G = \{u + v \; u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

On note F l'ensemble des polynômes pairs de E et G l'ensemble des polynômes impairs. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis que

$$F \cap G = \{0\} \qquad \text{et} \qquad E = F + G.$$

Exercice 9

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fabriquer une famille libre de $\mathcal{C}$ à n éléments. En déduire que $\mathcal{C}$ n'est pas de dimension finie.

Avec un raisonnement analogue, on peut aussi montrer que l'espace des suites réelles ou l'espace $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas de dimension finie eux non plus.

Exercice 10

1. Montrer que la famille

$$\left(X^n, X^{n-1}(1-X), X^{n-2}(1-X)^2, \cdots, X(1-X)^{n-1}, (1-X)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver les coordonnées de 1 et $\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$ dans cette base.

Exercice 11

1. **Théorème de la base incomplète.**
   Soit E un espace vectoriel et $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de E.

a. Montrer que si $(e_1, \cdots, e_p)$ n'est pas génératrice de E, alors il existe un vecteur f tel que la famille $(e_1, \cdots, e_p, f)$ soit encore libre.

b. On suppose que E est de dimension n. Montrer qu'on peut compléter la famille libre $(e_1, \cdots, e_p)$ en une base $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_{n-p})$ de E.

2. Une application.

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On cherche à établir la formule suivante

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$

où $F+G$ est le sous-espace vectoriel défini par

$$F + G = \{u + v;\ u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

On note $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $F \cap G$.

a. Montrer qu'il existe une base de F de la forme $(e_1 \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ et une base de G de la forme $(e_1, \cdots, e_p, g_1, \cdots, g_r)$.

b. Montrer que $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q, g_1, \cdots, g_r)$ est une base de E et conclure.

3. Une autre application.

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions 3 tels que $E_1 \neq E_2$.

a. Montrer que $\dim(E_1 \cap E_2) \leqslant 2$.

b. On suppose que $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$. Montrer qu'il existe 5 vecteurs e, u_1, v_1, u_2, v_2 tels que (e, u_1, v_1) forme une base de E_1 et (e, u_2, v_2) forme une base de E_2, puis que la famille (e, u_1, v_1, u_2, v_2) est une famille libre de E. En déduire que $\dim(E_1 \cap E_2) \neq 1$.

c. Montrer de façon analogue que $\dim(E_1 \cap E_2) \neq 0$.

d. En déduire la dimension de $E_1 \cap E_2$.

Remarque 1. Les exercices plus avancés de probas discrètes feront l'objet d'une autre quinzaine de colles.